Chapter 2

核力の問題

2.4 結合エネルギーと核力

核力の性質を明らかにする試みとして大きく２種類
· 先の結合エネルギーに注目して核力の法則を探す
· 核子同士の散乱や重水素 ${}^2_1H$ の性質に関する実験事実に注目して核力の法則を探す。
歴史的経緯としては両者が互いに影響しあい、修正し合いながら研究が進んだ。

Heisenberg は核子間に働く力を水素原子 H と水素イオン H^+ の間に働く力と類似であろうと想像。(→交換力の概念) この力は、電子が２つの陽子の一方から他方へと交換され、その結果 H と H^+ が位置を入れ替えることで力が現れる。[1]

Heisenberg

中性子と陽子の空間座標およびスピン座標をそれぞれ $\mathbf{r_1}, \zeta_1, \mathbf{r_2}, \zeta_2$ とし、この２粒子系の波動関数 $\phi(\mathbf{r_1}\zeta_1, \mathbf{r_2}\zeta_2)$ に作用する核力ポテンシャルの OperatorV_H は、

$$V_H\phi(\mathbf{r_1}\zeta_1, \mathbf{r_2}\zeta_2) = v_H(r)\phi(\mathbf{r_2}\zeta_2, \mathbf{r_1}\zeta_1) \tag{2-4-1}$$

となる。(V_H は空間座標と spin 座標を共に入れ替える) ここで、$v_H(r)$ は 2 粒子間の距離 r のある関数。空間座標の交換演算子と spin 座標の交換演算子を別々にそれぞれ P_r, P_ξ と定義すると

$$V_H = v_H(r)P_rP_\zeta \tag{2-4-3}$$

とかける。また P_r, P_ξ はあきらかに可換。

Majorana

空間座標の交換による交換力

$$V_M = v_M(r)P_r \tag{2-4-4}$$

Bartlett

spin 座標の交換による交換力

$$V_B = v_B(r)P_\zeta \tag{2-4-5}$$

Wigner

非交換性の引力

$$V_W = v_W(r) \tag{2-4-6}$$

[1]電子をあからさまに導入せず水素原子間の spin-spin 相互作用という形で交換力を定式化することもできる。
この定式化を参考にして、核子の間を行き来する未知の粒子を導入せずに、isospin という新たな量子数を導入する道を選んだのが Heisenberg。電荷の違いを除いて陽子と中性子は共に spin1/2 で質量もほぼ同じであるため、異なる粒子と考えるより同一の粒子の異なる状態と考える。陽子と中性子を核子場 (isospin 空間中で spinor としてふるまう) として扱うやり方。

P29 の一番下の段落

Wigner 力の作用半径内に全核子 A 個があるとき、ポテンシャルが A の 2 乗に比例するのは、核子間のすべてのペアの個数を考えればよい。たとえば核子が 2 個なら力を及ぼしあうペアは 1 組=${}_2C_2$、3 個なら ${}_3C_2$、A 個なら ${}_AC_2$ で、重い核ならおよそ A^2 に比例する。

したがって重い核になればなるほど大きな密度と結合エネルギーをもち、飽和性の説明にならない。(陽子間のクーロン斥力を考慮しても同じ。)

次に 2 個の中性子の間にも、2 個の陽子の間にも、中性子と陽子の間にもクーロン斥力を度外視して、交換力が作用する場合を考えてみる。例として中性子数と陽子数が等しく、共に偶数なものをとり、A 個の核子がすべて核力の作用圏内に凝縮した場合のエネルギーは

· Majorana 力の場合、位置について対称な核子対の数を n_+, 反対称核子対の数を n_- とすると、（詳細は付録３）

$$n_+ - n_- = 2A - \frac{A^2}{8} \tag{2-4-8}$$

これをみると、作用圏内の核子数 A が大きくなりすぎるとポテンシャルがかえって高くなってしまうことがあり、すべての核子が核力作用圏に凝縮するようなことを回避するはずで、そうすると核の密度は一定値にとどまり、飽和性を説明する余地がある。

·Heisenberg 力の場合、空間座標と spin 座標の両方の入れ替えに対して対称（あるいは共に反対称）な核子対の数を n_+, どちらかについて対称で、他方が反対称な核子対の数を n_- と再定義して、計算すると

$$n_+ - n_- = A - \frac{A^2}{4} \tag{2-4-9}$$

となり、式の形から、Majorana 力と同様飽和性を説明する余地がある。

·Bartlett 力では、spin について対称核子対の数を n_+, 反対称核子対の数を n_- とすると

$$n_+ - n_- = -A + \frac{A^2}{4} \tag{2-4-10}$$

となり、A が 4 より大きいと、引力のほうがエネルギーが得なので、密度がどんどん大きくなってしまう。したがって Bartlett 力では飽和性を説明できない。ただしここで引力斥力の符号は、v_H, v_M, v_B が負であることを前提に定義してあることに注意する。[2]

が、飽和性を説明しない Wigner 力や Bartlett 力の仮定は捨て去るべきかというと、それはやや早計で、密度や結合エネルギーの飽和性という事実は、$A \leq 260$ ぐらいの A の有限変域についての経験則で、Majorana 力・Heisenberg 力に影響を及ぼさない程度であれば、あってもおかしくはない。

実際には高エネルギー核子-核子散乱の実験から、交換力が非交換力とならんで実際に存在することが確かめられたが、同時にそれらは同程度の強さということもわかり、このような大きな非交換力があると、結合エネルギーの飽和性は現れないように思えるが、後に核力が斥力 core をもつことが飽和性を説明するための鍵だとわかった。それについては 6.3 節を参照されたい。

ここまでの議論で用いた仮定は

核力が n 同士、p 同士、n-p 間で同じ

というもので、これは「核力の荷電独立性」と呼ばれ、非常に良い近似で成り立つものである。

言い換えると、isospin 対称性 (isospin 空間における回転に対しての不変性) がよい精度で成立する。（電磁相互作用は小さい）

Weizsäcker-Bethe の質量公式の第３項

$$-a_3 \frac{(N-Z)^2}{A} \tag{2-4-11}$$

という対称エネルギーが示すところの、N=Z 核の安定性も、交換性の核力の存在で説明できる。

というのも、isobar 中では N=Z の場合に (対称核子対の数-反対称核子対の数) が最大になるはず、そのため対称エネルギーの項は N=Z で最低になるはずで、関数形は（N-Z) のベキが予想される。また、１核子あたりの対称エネルギーは粒子の密度の関数であることが期待され、(N-Z)/A の関数となっていることが予想される。さらに、核力の荷電独立性から、(N-Z)/A の１時の項はないはず。なぜなら、N-Z の２次の項は、陽子数と中性子数の差のみに依存しているのに対して、N-Z では、電荷が質量公式に反映されることになり、仮定していた核力の対称性が損なわれてしまうためである。—N-Z—が A に比べて十分小さい場合、(N-Z)/A の３次以上の項を落として、リーディングオーダーを見ると、

$$-a_3 (\frac{(N-Z)}{A})^2 \tag{2-4-12}$$

となり、核全体の対象エネルギーは (2-4-11) 式の形となる。

また、p,n の数の偶奇による結合エネルギーの相違を表す項 $\delta(A)$ は核力の交換性とは直接関係なく、同種核子が核半径に比べて十分小さな距離に近づく場合、引力としての核力の効果によって生じる。(Pairing を作ったほうがエネルギーが低い)

[2] 今説明しようとしているのは核力、つまり核同士を引き付け合う力なので、この前提は妥当である

2.5 重水素核 (重陽子)

結合エネルギー

1 個の n と 1 個の p が結合してできた重水素核は最も単純な構造を持った安定核である。
重水素核の基底状態はおもに ^3S 状態 (ほんのすこし ^3D が混じる)、すなわち、triplet かつ、軌道角運動量による磁気モーメントへの寄与がほとんど無視できる。(波動関数が球対称で、陽子と中性子をつなぐベクトルの方向に依らない。)

補足

L≠0 の P,D などの状態が存在しない理由について。いま、核の持つ全角運動量 $\mathbf{I} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ において、I=1 で、S=1 より、許される L は、角運動量の合成の一般論を思い出して、L=0,1,2 となり、$^3S, ^3P, ^3D$ が許されるが、L にともなうパリティは $(-1)^L$ であるから (球面調和関数)、核力におけるパリティ保存性から、奇パリティ状態 ^3P は偶パリティ状態 $^3, ^3D$ と混合することはない。

重水素核の結合エネルギー (2.22MeV) にもとづいて、核力のポテンシャルの深さの目安を概算をしてみる。
まず重陽子の基底状態に対する第 0 近似として、中性子-陽子間に (純粋)[3] 状態で働く核力ポテンシャルが、中心力ポテンシャル V(r) で与えられるとする。$r = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n|$。このとき相対運動の波動関数を

$$\phi(r) = (4\pi)^{-1/2} \frac{u(r)}{r} \tag{2-5-1}$$

とおくと、u(r) は Schrödinger eq は

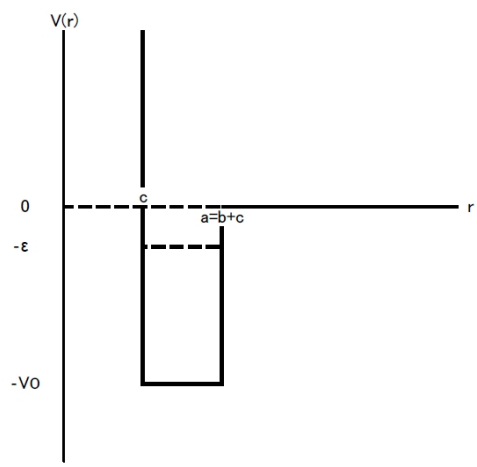
$$-\frac{\hbar^2}{M}\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \{V(r) + \epsilon\}u(r) = 0 \tag{2-5-2}$$

を満たす。ここで $M_p \simeq M_n \equiv M$ より、相対運動の換算質量は M/2 に等しい。波動関数の規格化は

$$\int_0^\infty u^2(r)\ dr = 1 \tag{2-5-3}$$

核力が引力部分の内部に斥力 core を持つと考え、それをモデル的に単純化した次のポテンシャルを考える。

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r < c \\ -V_0 & c < r < a \\ 0 & a < r \end{cases}$$



このポテンシャルからわかるように Schrödinger eq のエネルギー固有値-ϵ の符号を逆にした ϵ が結合エネルギーになっている。V(r) は簡略化したモデルだということに留意する。固有関数は

$$\phi(r) = \begin{cases} N_1 \frac{sinK(r-c)}{r} & c \le r \le a \\ N_2 \frac{e^{-\kappa(r-a)}}{r} & a \le r \end{cases}$$

となる。[3]ここで、

[3]これは、非常に初歩的な 1 次元ポテンシャルの問題なので、計算は省略。

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{2\kappa(1+\kappa^2/K^2)}{1+(1+\kappa^2/K^2)(1-\frac{sin2Kb}{2Kb})}} \\ N_2 \frac{N_1}{\sqrt{1+\kappa^2/K^2}} \\ \kappa = \frac{\sqrt{M\epsilon}}{\hbar},\ K = \frac{\sqrt{M(V_0-\epsilon)}}{\hbar} \end{cases}$$

で、結合エネルギー ϵ は、V_0 と b が与えられると

$$-\kappa = KcotKb \tag{2-5-8}$$

から決まる。今、$K_0^2 = MV_0/\hbar^2$ とおくと、κ=$\sqrt{K_0^2 - K^2}$ となるから、

$$Kb\ cot\ Kb = -\sqrt{K_0^2 b^2 - K^2 b^2} \tag{2-5-9}$$

と変形して、Kb を変数に選んで曲線を書くと、交点に対応する Kb が根を与える。$K_0 b < \pi/2$ では結合状態が存在せず、$\pi/2 \leq K_0 b \leq 3\pi/2$ の時は結合状態がひとつあるだけとわかる。（次図参照）

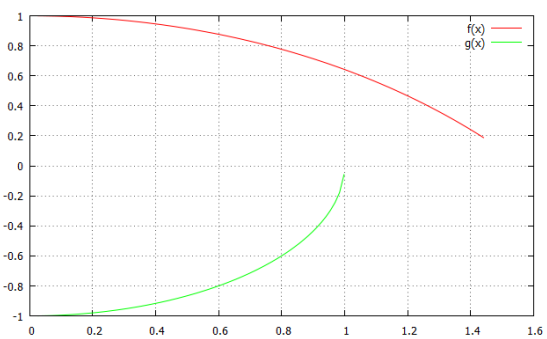


Figure 2.1: K_0b=1

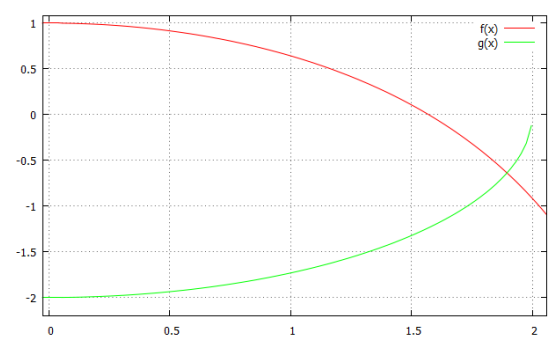


Figure 2.2: K_0b=2

なお、結合エネルギーの決定に斥力 core の半径 c が寄与しなかったことも注意。

したがって ϵ=2.22MeV という結合エネルギーからは V_0 と b の間の関係式が 1 つ得られるだけ。c も含んだ 3 つを決めるためには、広いエネルギー範囲にわたる核子散乱のデータが必要になる。

Schrödinger eq に左から u(r) をかけて、積分し、部分積分を行うと、境界条件と規格化条件を用いて

$$\epsilon = -\frac{\hbar^2}{M}\int_c^\infty (\frac{du}{dr})^2\ dr + V_0 \int_c^a u^2 dr \tag{2-5-10}$$

が得られる。いま、境界条件と規格化条件をかえずに u(r) の関数形を変えていくと、かなり深いポテンシャルの場合でも、引力部分の作用半径 b=a-c が小さいと、u(r) をどう選んでも正の ϵ が得られず、結合状態が存在しないことなどが分かる。重水素核の基底状態は絶妙なバランスで結合している。

重水素核の基底状態で、中性子と陽子が引力圏の内部に存在する確率

$$P_{in} = \int_c^a u^2 dr \tag{2-5-11}$$

と、引力圏外にあって核力を受けていない状態の確率

$$P_{ex} = \int_a^\infty u^2 dr \tag{2-5-12}$$

の比を、b=1.90fm、V_0=40MeV のとき

$$\frac{P_{in}}{P_{ex}} = 0.44, \quad \frac{P_{ex}}{P_{in}+P_{ex}} = 0.69 \tag{2-5-13}$$

となる。

重水素以外の簡単な原子核

・3 体系の Hamiltonian の導出粒子 1,2,3 の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ とし、$\overline{\mathbf{r}_1} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$,$\overline{\mathbf{r}_2} = \mathbf{r}_3 - (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)/3$ とおくと、
$\mathbf{p_R} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_{\overline{\mathbf{r}_1}} = (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)/2$, $\mathbf{p}_{\overline{\mathbf{r}_2}} = (2\mathbf{p}_3 - \frac{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2}{2})/3$ となり、

$$\begin{cases} \nabla_1 = -\nabla_{\overline{\mathbf{r}}_1} - \frac{1}{2}\nabla_{\overline{\mathbf{r}}_2} + \frac{1}{3}\nabla_{\mathbf{R}} \\ \nabla_2 = \nabla_{\overline{\mathbf{r}}_1} - \frac{1}{2}\nabla_{\overline{\mathbf{r}}_2} + \frac{1}{3}\nabla_{\mathbf{R}} \\ \nabla_3 = \nabla_{\overline{\mathbf{r}}_2} + \frac{1}{3}\nabla_{\mathbf{R}} \end{cases}$$

これから、$H = -\frac{\hbar^2}{M}\Delta_{\overline{\mathbf{r}}_1} - \frac{3\hbar^2}{4M}\Delta_{\overline{\mathbf{r}}_2} - \frac{\hbar^2}{6M}\nabla_{\mathbf{R}}$ となる。第 3 項が重心運動の Hamiltonian で、第 1 項+第 2 項が、テキスト P37 の演算子となる。4 体系への拡張も同様。

テンソル力

重水素核のデータからは、各力にはテンソル力と呼ばれる非中心力 (これまでは中心力で計算した。（第 0 近似）) が混じっているという重要な結論が得られる。1950 年ころに重水素の核磁気共鳴スペクトルの実験から、重水素核は、電気四重極モーメントを持つことがわかった。

もしも核力が完全に中心力であれば、重水素核の軌道角運動量はハミルトニアンと可換で、基底状態は純粋の S 状態でなければならず、重心の周りの陽子分布は完全に球対称でなければおかしい。が、実験結果から電気四重極モーメントを持つことがわかったため、核力の中には非中心力が含まれていることが分かる。

基底状態の重水素核に付随した固有の方向としては、その合成スピンの方向しか考えられないから、電荷分布はこの合成スピン方向を対称軸とする軸対称分布を持つと考える。この対象軸方向を z' 軸に選んで、x', y', z' 軸をとった時、$\mathbf{r}' = (x', y', z')$ として、

$$Q_0 = \int \rho(\mathbf{r}')(3z'^2 - r'^2) \tag{2-5-14}$$

を固有電気四重極モーメントと呼ぶ。ここに、$e\rho(\mathbf{r}')$ が $\mathbf{r}'$ での電荷密度。$\rho(\mathbf{r}')$ が球対称なら Q_0 は 0,z' 方向に細長い回転楕円形であれば正、逆に z' 方向につぶれた回転楕円形（みかん型）なら負。

注意として、実際には空間的に固定された方向に電場をかけて、その方向 (z とする) についてのモーメントを測るので、直接測られるのは、上の Q_0 ではなくて、空間に固定された座標軸に関する

$$Q = \int \rho(\mathbf{r})(3z^2 - r^2)d\mathbf{r} \tag{2-5-15}$$

であるということに留意する。今固定軸 x,y,z からみた z' 軸の方向を Θ, Φ とし、$\mathbf{r}(= \mathbf{r}')$ の x,y,z 軸についての方向を θ', φ' とかく。
$cos\theta$=$cos\Theta cos\theta' + sin\Theta sin\theta' cos\varphi'$ の関係を

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}')r'^2(3cos^2\theta - 1)d\mathbf{r}' \tag{2-5-16}$$

の右辺に代入して、$\rho(\mathbf{r}')$ の z' 軸周りの回転対称性を考慮に入れて計算すると、

$$Q = \frac{1}{2}(3cos^2\Theta - 1)Q_0 \tag{2-5-17}$$

となる。[4]以上は古典論的だが、QM 的な修正のためには $\rho(\mathbf{r})$ として系の波動関数を用いなければならない。すると、系の固有関数は、合成スピンとその z 成分を表す量子数、I,M(M=-I,...,I) を持つから、Q にも $Q_{I,M}$ と、2I+1 個の値があることになる。いわゆる方向量子化の関係式

$$cos\Theta = \frac{M}{\sqrt{I(I+1)}} \tag{2-5-18}$$

を使うと、[5]$Q_{I,M}$ の M による変化は先の (2-5-17) からもわかるように

$$Q_{I,M} = \frac{1}{2}(\frac{3M^2}{I(I+1)} - 1)Q_0 \tag{2-5-19}$$

で与えられる。そこで改めて、M = I のときの $Q_{I,M}$ を Q で表して

$$Q \equiv Q_{I,I} = \frac{2I-1}{2(I+1)}Q_0 \tag{2-5-20}$$

[4] φ' についての積分に寄与する項だけを考えればよいので計算は容易
[5] 分母を払えば全角運動量の spin 量子化軸方向の成分になっていることから理解できる。

を、固有電気四重極モーメント Q_0 と区別して単に電気四重極モーメントと呼ぶことにする。Q が Q_0 よりも小さくなるのは、角運動量ベクトルが不確定性関係のために、外からの電場の向きにぴったり一致せずに、ゆらぎを持つため。
重水素核の電気四重極モーメントの測定値は $Q = 2.74 \times 10^{-27} cm^2$ で、基底状態の波動関数を用いて求めた r^2 の平均値 $\langle r^2 \rangle = 97.4 \times 10^{-27} cm^2$ と比べると非常に小さい。Q>0 となることは、球対称からレモン型にわずかに歪んでいることを意味する。
非中心力ポテンシャルはどのような演算子かというと、2 核子の spin についての Pauli の演算子と 2 核子の相対位置のベクトル $\mathbf{r}$ から作られる。その形の中で、

$$v_T(r)\{3\frac{(\sigma_1 \cdot \mathbf{r})(\sigma_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - (\sigma_1 \cdot \sigma_2)\} \equiv v_T S_{1,2} \tag{2-5-21}$$

はテンソル力ポテンシャルと呼ばれ、Q の存在をうまく説明する。$v_T(r)$ は距離 r のある関数。

テンソル力の諸性質

(1) テンソル力は軌道角運動量とは可換ではないが、合成スピンベクトルの大きさの 2 乗および全角運動量とは可換。
(2) 合成スピンが 0 の状態ではテンソル力は 0
(3) 合成スピンが 1 の状態では、$\mathbf{r}$ が合成スピンに平行な場合には $2v_T(r)$、直角な場合には $-v_T(r)$ となり、中心力ではない。
重水素核では、中性子から見た陽子の分布が球対称からずれて、レモン型 (Q>0) になっていることは、$v_T(r)$ が負で、引力であることを教えている。

テンソル力ポテンシャルがあると、重水素核の基底状態は純粋な $^3S_1$ 状態ではなく、$^3D_1$ の寄与もある。(波動関数で 7% 程度混じる)

付録３　対称・反対称な核子対の数

(1)　N=Z=A/2 の場合に関して、核子が Pauli の排他原理に抵触しないよう軌道に配列されると考えて、　対称・反対称な核子対の数を計算する。以下では、まず Majorana の交換 Operator(空間座標の交換) について 2.4 節 (8) 式、本レジュメ（2-4-8）のようになることを説明する。

$n_+ - n_-$ は、normalize された波動関数によって、

$$n_+ - n_- = \sum_{i>j} \int \Phi^* P_r(i,j) \Phi d\tau \tag{A3.1}$$

と書ける。summation の下の $i > j$ は、粒子のラベル i、j に関する和を、重複なく行うことを意味している。

ここで、Φ は核子配置に対する波動関数で、$\Phi = \Phi(\mathbf{r_1}\zeta_1, \mathbf{r_2}\zeta_2, ..., \mathbf{r_N}\zeta_N, \mathbf{r'_1}\zeta'_1, \mathbf{r'_2}\zeta'_2, ...\mathbf{r'_N}\zeta'_N)$ である。また、$\mathbf{r_i}, \zeta_i$ は i 番目の中性子の位置座標と、spin。プライムのついたものは陽子のそれである。また、τ はすべての空間座標と spin 座標をまとめたものである。ここで、波動関数を、中性子群と陽子群の Slater 行列式の積で表すことを考えよう。

多粒子系の波動関数をどう表現するか

$\phi_1, \phi_2, ...$ が完全規格直交関数系をなすなら、変数 $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$ の任意の関数は、N 個の ϕ の積の線形結合で表すことができる。またさらに ϕ が ξ_i と ξ_j の交換に対して反対称なら、それは Slater 行列式を用いて、

$$\Phi = \begin{vmatrix} \phi_1(\xi_1) & \phi_1(\xi_2) & \dots & \phi_1(\xi_N) \\ \phi_2(\xi_1) & \phi_2(\xi_2) & \dots & \phi_2(\xi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_N(\xi_1) & \phi_N(\xi_2) & \dots & \phi_N(\xi_N) \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{N!}}$$

と書ける。$\frac{1}{\sqrt{N!}}$ は、全体の波動関数の規格化のための因子である。（座標の交換に対して反対称な場合）これを量子力学 $< 2 >$(小出:裳華房) にならって、$||\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N||$ と略記することにする。

話を元に戻して、先の波動関数 Φ を中性子群と陽子群の Slater 行列式の積で表すと、

$$\Phi = ||\phi_{k_1 s_1}, \phi_{k_2 s_2}, ..., \phi_{k_N s_N}|| \cdot ||\psi_{k_1 s'_1}, \psi_{k_2 s'_2}, ..., \psi_{k_N s'_N}|| \tag{A3.2}$$

となる。ここで、ϕ, ψ はそれぞれ中性子, 陽子の軌道関数、s_i, s'_i はそれぞれ中性子, 陽子の spin 量子数、k_i はその他の量子数である。

(A3.1) 式の積分を、中性子同士の交換・陽子同士の交換・中性子-陽子間の交換に分解すると、

$$\int \Phi^* \sum_{i>j}^{N} P_r(i,j) \Phi \ d\tau + \int \Phi^* \sum_{m>n}^{N} P_r(m,n) \Phi \ d\tau + \int \Phi^* \sum_{i}^{N} \sum_{m}^{N} P_r(i,m) \Phi \ d\tau \tag{A3.3}$$

となる。ここで i,j は中性子をラベルするダミーで、m,n は陽子をラベルするダミーである。

$$\begin{aligned} (A3.3) \quad &= \frac{1}{2} \sum_{k_i s_i} \sum_{k_j s_j} \{ \langle k_i s_i; k_j s_j | P_r(i,j) | k_i s_i; k_j s_j \rangle - \langle k_j s_j; k_i s_i | P_r(i,j) | k_i s_i; k_j s_j \rangle \} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k_m s'_m} \sum_{k_n s'_n} \{ \langle k_m s'_m; k_n s'_n | P_r(m,n) | k_m s'_m; k_n s'_n \rangle - \langle k_n s'_n; k_m s'_m | P_r(m,n) | k_m s'_m; k_n s'_n \rangle \} \\ &+ \sum_{k_i s_i} \sum_{k_m s'_m} \langle k_i s_i; k_m s'_m | P_r(i,m) | k_i s_i; k_m s'_m \rangle \end{aligned}$$

となる。[6]

[6] 板書と口頭による説明で示します。

第 1 行の和を求めると、P_r を具体的に作用すると、

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{k_i s_i}\sum_{k_j s_j}\{\langle k_i s_i; k_j s_j | k_j s_i; k_i s_j\rangle - \langle k_j s_j; k_i s_i | k_j s_i; k_i s_j\rangle\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k_i s_i}\sum_{k_j s_j}\{\delta(k_i, k_j) - \delta(s_j, s_i)\}
\end{aligned}
$$

[7]

$$
= \frac{1}{2}\sum_{k_i}\sum_{s_i}\sum_{s_j} 1 - \frac{1}{2}\sum_{k_i}\sum_{k_j}\sum_{s_i} 1 \;=\; N - \frac{N^2}{4} \tag{A3.4}
$$

第 2 行の和 (陽子-陽子) に対しても、ラベルを中性子のものから陽子のものに入れ替えると容易にわかるように、$N - N^2/4$
第 3 行の和は、

$$
\sum_{k_i s_i}\sum_{k_m s'_m}\langle k_i s_i; k_m s'_m | k_m s_i; k_i s'_m\rangle = \sum_{k_i s_i}\sum_{k_m s'_m}\delta(k_i, k_m) = 4\sum_{k_i} 1 = A \tag{A3.5}
$$

以上から 2.4 節 (8) 式を得る。Heisenberg 力と Barlett 力に関する計算への拡張は容易である。

(2)N,Z ともに偶数で N≠Z の場合を考えよう。Majorana 交換力の場合は (1) の結果から、

$$
n_+ - n_- = \begin{cases} (N - \frac{N^2}{4}) + (Z - \frac{Z^2}{4}) + 2Z & N > Z \\ (N - \frac{N^2}{4}) + (Z - \frac{Z^2}{4}) + 2N & Z > N \end{cases}
$$

最後の 2Z,2N の項は、Z と N のズレによって生じる項で、(A3.5) から、Z と N の少ない項が A として現れる。いま、N+Z=A、(N − Z)/2=T_z とすると、

$$
n_+ - n_- = \begin{cases} (2A - \frac{A^2}{8}) - 2T_z - \frac{T_z^2}{2} & T_z > 0 \\ (2A - \frac{A^2}{8}) + 2T_z - \frac{T_z^2}{2} & T_z < 0 \end{cases}
$$

となり、$n_+ - n_-$ は、A=一定の isobar の間では、N=Z のとき最大になることが分かる。

[7] $|k_i\rangle \otimes |s_i\rangle$ は N 個の多粒子系を記述する空間において N 個の基底をなすはずで、いま、spin は上向きと下向きで 2 通り、したがって、$|k_i\rangle$ は N/2 個

付録 4　核の電気モーメント

今原点のまわりに $e\rho(\mathbf{r}')$ という電荷密度の分布が会った時に、その広がりに比べて十分遠方の点 P(=$\mathbf{r}$) にあらわれる静電場は、cgs 単位系で、

$$\phi(\mathbf{r}) = e\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}' \tag{A4.1}$$

で与えられ、今 $r \gg r'$ として r'/r で分母を展開し、2 次までとると、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{e}{r}\int \rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' + \frac{e}{r^2}\int \rho(\mathbf{r}')(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')d\mathbf{r}' + \frac{e}{r^3}\int \rho(\mathbf{r}')\frac{1}{2}\{3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')^2 - r'^2\}d\mathbf{r}' \tag{A4.2}$$

とかけて、第 1 項は全電荷を表し、第 2 項は

$$eQ_i^{(1)} = e\int \rho(\mathbf{r}')x_i'd\mathbf{r}' \qquad \mathbf{r}' = (x_1', y_2', z_3') \tag{A4.3}$$

で定義される電気双極モーメント (ベクトル) を用いると、

$$\frac{e}{r^2}(\mathbf{Q}^{(1)}\cdot\mathbf{n}) \tag{A4.4}$$

次に第 3 項は

$$eQ_{ij}^{(2)} = e\int \rho(\mathbf{r}')(3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2)d\mathbf{r}' \qquad (i,j=1,2,3) \tag{A4.5}$$

で定義される電気四重極モーメントとよばれる 2 階対称テンソルを用いると、第 3 項は

$$\frac{e}{2r^3}(\mathbf{Q}^{(2)}\cdot\mathbf{nn}) \tag{A4.6}$$

とかける。分子の意味は

$$(\mathbf{Q}^{(2)}\cdot\mathbf{nn}) = \sum_i\sum_j Q_{ij}^{(2)}n_in_j \tag{A4.7}$$

というスカラーである。
結局 r が十分に大きい所では、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{eQ^{(0)}}{r} + \frac{e}{r^2}(\mathbf{Q}^{(1)}\cdot\mathbf{n}) + \frac{e}{2r^3}(\mathbf{Q}^{(2)}\cdot\mathbf{nn}) + ... \tag{A4.8}$$

とかける。

電気四重極モーメントの (5) の定義はまったく任意の直行座標系について与えられているが、とくに電荷分布がある対称軸の周りに回転対称になっている場合を考える。その場合には、その対象軸を z 軸にとり、それに直交するように x,y 軸をとれば $Q_{33}^{(2)}$ または $Q_{22}^{(2)}$ 以外の成分は 0 になり、

$$Q_{22}^{(3)} = \int \rho(\mathbf{r}')(3z'^2 - r'^2)d\mathbf{r}' \tag{A4.9}$$

となる。本文中で出てきた固有電気四重極モーメント Q_0 とよんだものがこれに対応する。本文中にもあったように、角運動量の量子化のため、Q_0 の向きのゆらぎが存在して、直接測られる電気四重極モーメント Q は一般にその絶対値が Q_0 よりも小さくなる。

余談:β 崩壊についての Lagrange Formalism

[8]

β-decay すなわち neutron が electron と neutrino(正確には antineutrino) を放出して、proton に変化する過程には、4 個の場が関与している。

$$n \to p + e + \bar{\nu} \tag{AA.1}$$

が、n と p と e とは spin1/2 を持った spinor 場であるので、antineutrino$\bar{\nu}$ も spinor でないと困る。それは当然、3 個の spinor と 1 個の scalar や vector の積では、scalar の Lagrangian が構成できないため。

そこで、各場をそれぞれ ψ_n(x)、ψ_p(x)、ψ_e(x)、$\psi_{\bar{\nu}}$(x) とすると、最も簡単なそれらの相互作用として

$$\mathscr{L}^S_{int}[x] = G_S(\overline{\psi_p}(x)\psi_n(x))(\overline{\psi_e}(x)\psi_{\bar{\nu}}(x)) + c.c \tag{AA.2}$$

や

$$\mathscr{L}^V_{int}[x] = G_V(\overline{\psi_p}(x)\gamma_\mu\psi_n(x))(\overline{\psi_e}(x)\gamma_\mu\psi_{\bar{\nu}}(x)) + c.c \tag{AA.3}$$

$$\mathscr{L}^T_{int}[x] = \frac{G_T}{2}(\overline{\psi_p}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi_n(x))(\overline{\psi_e}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi_{\bar{\nu}}(x)) + c.c \tag{AA.4}$$

$$\mathscr{L}^A_{int}[x] = G_A(\overline{\psi_p}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi_n(x))(\overline{\psi_e}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi_{\bar{\nu}}(x)) + c.c \tag{AA.5}$$

$$\mathscr{L}^P_{int}[x] = G_P(\overline{\psi_p}(x)\gamma_5\psi_n(x))(\overline{\psi_e}(x)\gamma_5\psi_{\bar{\nu}}(x)) + c.c \tag{AA.6}$$

などが考えられる。ここで $\overline{\psi}$ は Pauli conjugate（Dirac conjugate とも）を表し、γ_μ は Dirac の γ-matrix(とくに Pauli 表現を想定している。)、γ_5=$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$、$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$

（2）から順に、scalar,vector,tensor,axial-vector,pseudo-scalar の相互作用とよばれる。このような 4 個の spinor がかかった相互作用を Fermi 型相互作用という。これらの Lagrangian は scalar で、4 次元回転に対して不変で、空間反転に対して符号をかえない。一般にこれらの線形結合が相互作用の形として考えられる。

β-decay ではいわゆる V-A 相互作用

$$\mathscr{L}^\beta_{int}[x] = -G(\overline{\psi_p}(x)(1+\lambda\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n(x))(\overline{\psi_e}(x)(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_{\bar{\nu}}(x)) + c.c \tag{AA.7}$$

がだいたいよいとかんがえられる。λ はほぼ 1 くらい、G はほぼ $10^{-49} erg \cdot cm^3$。Fermi 型の相互作用は、実験と合う組み合わせがなかなか見出されなかったという事情があった。また、くりこみ理論が出た後も上のような相互作用はくりこみ不可という困難があった。これを解消すべく、たとえば β-decay を 4 個の spinor の直接の相互作用と考えず 2 段に分けて neutron は W^- を出して proton に変わり、次に W^- が electron と antineutrino に decay する

$$n \to p + w^- \tag{AA.8}$$

$$w^- \to e + \bar{\nu} \tag{AA.9}$$

が起こると考えると、β-decay の過程を 2 個の spinor と 1 個の scalar(または pseudo-scalar) の Yukawa 型の相互作用に帰せられる。数十年前になっていわゆる弱い相互作用 (2.7) も電磁相互作用も 1 個の最も基本的な Yukawa 型の相互作用に帰せられ、くりこみもできるということが発見された。その基本的な相互作用は、電磁相互作用で重要な役割をする gauge 変換と、アイソスピン空間における変換を取り入れた non-Abelian gauge theory で説明される。(→Yang-Mills theory や Weinberg-Salam theory)

[8] この節では、添字上下を区別していない